

20/09/17

$A, B \in F^{v \times y}$ Οι A, B λέγεται ισοδύναμοι αν υπάρχουν
 $P \in F^{v \times v}$ $Q \in F^{y \times y}$ αντιστρέψιμοι ώστε $B = PAQ$

ΕΙΔΩΜΕ

$A = [T]_e^f$ τότε B ισοδύναμος με τον A αν υπάρχουν
 βάσεις e', f' ώστε $B = [T]_{e'}^{f'}$

ΛΟΓΟΣ

$$[T]_{e'}^{f'} = \underset{\substack{\parallel \\ P}}{[id]_f^{f'}} [T]_e^f \underset{\substack{\parallel \\ Q}}{[id]_e^e}$$

Θεώρημα: $A, B \in F^{v \times y}$ ισοδύναμοι αν και μόνο αν $\text{βαθμίδα}(A) = \text{βαθμίδα}(B)$

Πόρισμα: Έστω $A \in F^{v \times y}$ με $\text{βαθμίδα}(A) = d \geq 1$. Τότε υπάρχουν
 αντιστρέψιμοι
 $P \in F^{v \times v}$, $Q \in F^{y \times y}$ ώστε $PAQ = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in F^{v \times y}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

αν $v=3$, $y=4$, $d=2$ $\begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

απόδειξη: Αμέσως από το Θεώρημα γιατί $\text{βαθμίδα} \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = d = \text{βαθμ}(A)$

ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ ^L Αλγόριθμος: υποθέτουμε $A \in F^{v \times y}$ και $d = \text{βαθμίδα}(A)$

Ο αλγόριθμος υπολογίζεται το d και αντιστρέψιμους
 $P \in F^{v \times v}$, $Q \in F^{y \times y}$ ώστε

$$PAQ = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βήμα: 1: Έστω $e = (e_1, \dots, e_y)$ η κανονική βάση του F^y
 $g = (g_1, \dots, g_m)$ η κανονική βάση του F^v .

Συμβολισμός: $y \in f: F^y \rightarrow F^v$ την γραμ. απεικόνιση $y \in$
 $[f]_e^g = A$.

Βήμα: 2: Θεωρούμε τον υπόχωρο $\ker f$ του F^y
Έχουμε $\dim \ker f = \dim F^y - \dim \operatorname{Im} f$
 $= y - \operatorname{rang}(A) = y - d$

Βρίσκουμε βάση $\{h_1, \dots, h_{y-d}\}$ του $\ker f$. Την επεκτείνουμε
σε βάση $\{h_1, \dots, h_{y-d}, p_1, p_2, \dots, p_d\}$ του F^y

Αναδιατάσσοντας θεωρούμε την (διατεταγμένη) βάση
 $\rightarrow m = (p_1, \dots, p_d, h_1, \dots, h_{y-d})$ του F^y

Βήμα: 3: Ξέρουμε ότι τα διανύσματα $f(p_1), \dots, f(p_d)$
είναι βάση του $\operatorname{Im} f$. Την επεκτείνουμε σε βάση
 $\rightarrow Z = (f(p_1), \dots, f(p_d), w_1, \dots, w_{v-d})$ του F^v .

Βήμα: 4: Θέτουμε $P = [id_{F^v}]_g^z$, $Q = [id_{F^y}]_m^e$

$$\text{Τότε } PAQ = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1x)

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \in F^{3 \times 4}.$$

Βήμα: 1 Έστω $e = (e_1, \dots, e_4)$ κανονική βάση του F^4
 $g = (g_1, \dots, g_3)$ κανονική βάση του F^3

Συμβολισμός: $f: F^4 \rightarrow F^3$ την γραμ. απεικόνιση με
 $[f]_e^g = A$

$$\text{Άρα } f((1, 0, 0, 0)) = 1g_1 + 2g_2 + 1g_3 = (1, 2, 1)$$

$$\text{ομοίως } f(e_2) = (1, 1, 2)$$

$$f(e_3) = (-1, 2, 5)$$

$$f(e_4) = (2, 3, 3)$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f((x, y, z, w)) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4) = \\ &= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) + w f(e_4) \\ &= (x+y-z+2w, 2x+y+2z+3w, x+2y-5z+3w). \end{aligned}$$

Βήμα: 2: Υπολογίζουμε $\ker f$

Από τον ορισμό $(x, y, z, w) \in \ker f$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 2x+y+2z+3w=0 \\ x+2y-5z+3w=0 \end{cases}$$

Μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι για βάση του $\ker f$ είναι το σύνολο

$$\{(1, -3, 4, 1, 0), (-1, -1, 0, 1, 1)\}$$

Επεκτείνουμε σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$ προσαρμόζοντας τα διάνυσμα $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ και $e_2 = (0, 1, 0, 0)$

Αναδιατάσσοντας έχουμε την βάση

$$m = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (-3, 4, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\text{Άρα } \dim \ker f = 2 \Rightarrow d = \dim \ker f = 4 - 2 = 2.$$

Βήμα 3: Από την θεωρία, τα διανύσματα
 $f(1,0,0,0) = (1,2,2,1)$, $f(0,1,0,0) = (1,1,2)$
 είναι γρ. ανεξάρτητα. Τα επεκτείνουμε στη βάση

$$Z = \{(1,2,1), (1,1,2), (0,0,1)\} \text{ του } \mathbb{R}^3$$

Βήμα 4: Θέτουμε $D = [Id_{\mathbb{F}^3}]_g^z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Q = [Id_{\mathbb{F}^4}]_{-m}^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε $PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ⊥ εκτός ύλης

Πρόταση: Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{v \times v}$ με $\text{βαθμίδα}(A) = \text{βαθμίδα}(B) = d$.

Αλγόριθμος: Υπολογίστε $\tilde{P} \in \mathbb{F}^{v \times v}$, $Q \in \mathbb{F}^{u \times u}$

Βήμα 1: Με χρήση του προηγούμενου αλγόριθμου βρίσκουμε $P_1, P_2 \in \mathbb{F}^{v \times v}$,
 $Q_1, Q_2 \in \mathbb{F}^{u \times u}$ αντιστρέψιμους με $P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και
 $P_2^B Q_2 = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Άρα } P_1 A Q_1 = P_2 B Q_2 \Rightarrow B = (P_2^{-1} P_1) A (Q_1 Q_2^{-1})$$

$$\text{Θέτουμε } \tilde{P} = P_2^{-1} P_1, \quad \tilde{Q} = Q_1 Q_2^{-1}$$

$$\text{τότε } B = \tilde{P} A \tilde{Q}$$

ΜΗΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

$$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$(a+bi) + (a'+b'i) = (a+a') + (b+b')i$$

$$(a+bi) \cdot (a'+b'i) = (aa' + bb'i^2) + (ab' + a'b)i \\ = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

$$(a+bi)' = a-bi \leftarrow \text{o συζυγής μιγαδικός}$$

Παράδειγμα:

$$(3)' = 3$$

$$(i)' = -i$$

$$(5+6i)' = 5-6i$$

Παρατήρηση:

Έστω $z = a+bi \in \mathbb{C}$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$)

$$\text{Έχουμε } z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

Θέτουμε $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ $\leftarrow$ η συντική πραγματική ρίζα

Άρα $z\bar{z} = |z|^2$ (1) $\forall$ $(a, b) \neq (0, 0)$

Τότε $|z|^2 > 0$, Άρα (1) $\rightarrow z = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$

Άρα αν $(a, b) \neq (0, 0)$ (δηλ $z \neq 0$)

$$\text{ο } z \text{ αντιστρέφεται και } z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{b^2+a^2}$$

Παράδειγμα:

Βρείτε στο $\mathbb{C}$ το $(i)^{-1}$

$$i^{-1} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$(1+3i)^{-1} : (1+3i)^{-1} = \frac{1-3i}{10} \quad |0 = 1^2 + 3^2$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ.

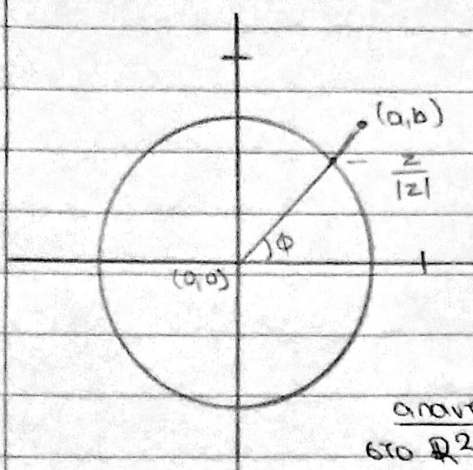
$$z = a + bi \in \mathbb{C} \text{ με } z \neq 0$$

$$\text{Τότε } |z| \neq 0 \text{ και } z = |z| \frac{z}{|z|}$$

Παρατηρούμε: Υπάρχει μοναδικός $\phi \in [0, 2\pi)$ ώστε $\frac{z}{|z|} = \cos \phi + i \sin \phi$

$$\text{Ο λόγος είναι } \left| \frac{z}{|z|} \right| = 1$$

$\mathbb{R}^2$



$$\text{Έστω } z = a + bi$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow \text{απόσταση στο } \mathbb{R}^2$$

του (a,b) από τον $(0,0)$

$$\Rightarrow \text{Ποιο είναι το } \frac{z}{|z|} ;$$

απάντ.: Το σημείο τής του μοναδιαίου κύκλου στο $\mathbb{R}^2$ με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την αρχή των αξόνων με το σημείο (a,b) . Άρα, αν ϕ η γωνία όπως στο σχήμα $\frac{z}{|z|} = \cos \phi + i \sin \phi$.

Παρατήρηση: Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ γη μηδενικά. Υπάρχουν $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$z_1 = |z_1| (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$$

$$z_2 = |z_2| (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$$

$$\text{Τότε } z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

Άρα, όταν πολλαπλασιάζουμε δύο μιγαδικούς το γινόμενο τους έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων και "άρθμα" δηλ. γωνία το άθροισμα των γωνιών